2. Визначення оптимального плану розвитку сільгосппідприємств в реальних умовах господарювання можливе тільки при використанні існуючих економіко-математичних методів та ЕОМ, тобто при впровадженні в сільське господарство автоматизованих систем керування.

3. Розв'язування оптимізаційних задач можливе тільки при наявності нормативної бази, яку потрібно створити шляхом проведення наукових досліджень, та постановки математичної моделі задачі.

4. Розв'язання оптимізаційних задач дозволить при тій же кількості наявних ресурсів отримати більший економічний ефект.

Література

1.Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.-М.:-Госуд. изд-во физико-математической литературн.-1958.- 783 с.
2.Благодатный В.И. Ускорение освоения орошаемнх земель.-К.: Урожай, 1988.- 144 с.
3.Даффин Р., Питерсон 3., Зенер К. Геометрическое программирование. Пер. с английского.-М.: Мир, 1972.- 311 с.
4.Курицкий Б. Поиск оптимальних решений в EXEL-7.0. Изд-во ВН . – 1997.

УДК 517. 977.

МАКРОЕКОНОМІЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРОБКИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПІДПРИЄМСТВА

С.В.ПОЛЕГЕНЬКО – здобувач;
С.І.ПЕНЗЕВА – асистент;
И.В.МАРАСАНОВА – студентка

Задача керування економічними процесами тісно пов'язані з вивченням властивостей цих процесів. При дослідженні економічних систем за допомогою математичних моделей вивчення властивостей зводиться до аналізу поводження траєкторій моделей, що імітують реальні процеси, що протікають у даній системі. В даний час найбільше об'єктивний метод побудова моделей грунтується на законах зберігання кількості капіталу і товару, реалізований макроекономічним підходом у виді моделей виробництва, розподіли, обміну і споживання.

Застосуємо цей підхід до побудови математичної моделі багатогалузевого сільськогосподарського підприємства (СП). Для спрощення вирахувань приймемо, що число галузей дорівнює двом (наприклад виробництво зерна і тваринництво).

Всю продукцію СП можна розділити на проміжну і кінцеву.

Проміжна – це та частина валової продукції, що йде в подальшу переробку (наприклад фуражне зерно) і утворить поточні матеріальні витрати.

Кінцевої називають частину валової продукції, що остаточно іде з виробничого процесу річного виробництва і використовується поза СП.

Позначимо: Xi (i=1,2) – інтенсивність валового продукту і-й галузі.

Yi (i=1,2) – інтенсивність кінцевого продукту і-й галузі.

xij (i, j=1,2) – інтенсивність міжгалузевого потоку продукції з і-й галузі на відтворення валової продукції j-й галузі.

Тоді відповідно до законів зберігання запишемо такі балансові рівняння для 2х галузей.

$$X^1 = x_1^1 + x_2^1 + Y^1$$

$$X^2 = x_1^2 + x_2^2 + Y^2 \qquad (1)$$

Дана система рівнянь дає незліченну множину збалансованих рішень, тому що її математичний аналог містить 2n+n2=2x2+22=8 невідомих: X1, X2, Y1, Y2 і елементи матриці міжгалузевих потоків

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Довизначимо цю модель такими, у загальному обгрунтуванні, обмеженнями. Будемо вважати, що міжгалузеві постачання xij продукції і-й галузі в j-ю галузь залежать лінійно від обсягу валової продукції Xj продукції j-го споживача і від норми матеріалоємності aij, що визначає витрати продукції і-й галузі на відтворення одиниці валової продукції j-й галузі (наприклад, кількість фуражного зерна, що йде в галузь тваринництво, залежать від чисельності череди і норм годівлі), тобто $x_j^i = a_j^i \cdot X^i \qquad i, j = 1,2$ тоді система (1) прикмет вид:

$$X^1 = a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 + Y^1$$

$$X^2 = a_1^2 X^1 + a_2^2 X^2 + Y^2 \quad \text{або}$$

$$X^i = \sum_{j=1}^{2} a_j^i X^j + Y^i, \qquad i = 1,2 \qquad (2)$$

Введемо позначення:

$\vec{X} = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$-вектор інтенсивності валового продукту;

$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}$-вектор інтенсивності кінцевого продукту;

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \left(a_j^i\right) -$ матриця коефіцієнтів прямих витрат (нормативна матриця матеріалоємності),

тоді $\vec{X} = A\vec{X} + \vec{Y}$ (3)

– економіко-математична модель міжгалузевого балансу двогалузевого СП.

Система рівнянь (3) містить 2n невідомих (компоненти валового і кінцевого продукту n галузей).

Для одержання єдиного рішення в залежності від типу задачі задають экзогенно, тобто фіксують, наприклад компоненти валового продукту і по ним $\vec{X}$ визначають компоненти вектора кінцевого продукту (або, $\vec{Y}$ навпаки $\vec{X} \to \vec{Y})$, по фіксованому векторі кінцевого продукту визначають вектор валового $\vec{Y}$ продукту $\vec{X}$ $(\vec{Y} \to \vec{X})$

У такий спосіб маємо дві задачі.

Задача спостерігаємості ($\vec{X} \to \vec{Y})$ відбиває процес розподілу валового продукту $(E - A)\vec{X} = Y$ (4)

Тут: Е – одинична матриця порядку n;

(Е-А) – матричний оператор перетворення валової продукції $\vec{X}$ у вектор кінцевої продукції $\vec{Y}$

Задача синтезу $(\vec{Y} \to \vec{X})$ відбиває зміст процесу планування валової продукції $\vec{X}$ по заданому векторі кінцевої продукції $\vec{Y}$ (обумовленої в основному на основі функції попиту на даний набір продукції СП).

$(E - A)^{-1}\vec{Y} = \vec{X}$ (5)

(Е-А)-1 – оператор планування, що перетворить екзогенний вектор кінцевого $\vec{Y}$ продукту у вектор валового $\vec{X}$ продукту.

Моделі планування і розподіли є відкритими. Вони дозволяють побудувати систему взаємозалежних показників, проте вони не відповідають на запитання наскільки ефективний той або інший план. Розглянемо докладніше задачу планування. По економічному змісту матриця А невід'ємна А$\geq 0, \quad т.к. \quad a_j^i \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}$.

Невід'ємність рішення $\vec{X}$ визначається продуктивністю матриці А. Умови продуктивності невід'ємної матриці А еквівалентно одній з таких умов:

Матриця (Е-А) невід'ємно оборотна, тобто всі елементи (Е-А)-1 невід'ємні.

Максимальне власне число $\lambda(A)$ матриці А менше 1: max $\lambda(A)$<1.

Послідовні головні мінори визначника матриці (Е-А)-1 позитивні.

Матричний ряд $E + A + A^2 + A^3 + ... = \sum_{t=0}^{\infty} A^t$ сходиться і

$$\sum_{t=0}^{\infty} A^t = (E - A)^{-1}$$

Позначимо елементи матриці (Е-А)-1 через сij тоді

$$c_1^1 Y^1 + c_2^1 Y^2 = X^1$$
$$c_1^2 Y^1 + c_2^2 Y^2 = X^2 \qquad (6)$$

Покладемо $\vec{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ тоді $\vec{X} = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \end{pmatrix}$ – характеризує витрати валової продукції обох галузей на відтворення одиниці кінцевої продукції першої галузі.

Аналогічно: $\vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \end{pmatrix}$ – витрати валової продукції обох галузей на відтворення одиниці кінцевої продукції другої галузі.

Іншими словами $c_j^i \quad i, j = 1,2$ є коефіцієнтами повних витрат.

Матриці коефіцієнтів непрямих витрат визначається як різниця між матрицею коефіцієнтів повних витрат (Е-А)-1 і матрицею прямих витрат А.

При заданій матриці прямих витрат і векторі кінцевого продукту визначається вектор валового продукту $\vec{X}$ і міжгалузеві потоки x_j^i. Після перебування планованого вектора $\vec{X}$ можна розрахувати витрати праці й основних виробничих фондів на реалізацію плану.

Для упорядкування балансу праці введемо коефіцієнти трудомісткості для кожної галузі, отримані на основі звітних балансів:

$$b_0^i = \frac{l_0^i}{x_0^i} \tag{7}$$

де:

b_0^i – норма трудомісткості i-й галузі в звітному році;

l_0^i – затрати праці i-й галузі в звітному році;

x_0^i – валовий продукт i-й галузі в звітному році.

Для двогалузевого СП це будуть (b_0^1, b_0^2).

При упорядкуванні балансу праці норми трудомісткості (b_0^1, b_0^2) , отримані розрахунковим шляхом із звітного балансу, коректуються для планового балансу (b_n^1, b_n^2), відкіля баланс праці приймає вид

$$L_n = b_n^1 x_n^1 + b_n^2 x_n^2 \tag{8}$$

Прогнозуючи трудові ресурси на планований період L*, оцінимо забезпечення плану по праці.

Якщо виявиться, що Ln>L*, те планований вектор валового продукту $\vec{X}_n = (x_n^1, x_n^2)^1$ не забезпечується трудовими ресурсами; отже, треба вибирати новий варіант і змінити вектор кінцевого продукту $\vec{Y}_n = (y_n^1, y_n^2)^1$,. Знову обчислити вектор валової продукції і перевірити забезпеченість його трудовими ресурсами – тобто приходимо до багатокрокової задачі динамічного програмування. При цьому, якщо в кожній галузі трудові ресурси уявити по видах діяльності (видам робіт), те баланс праці буде інтерпретований системою рівнянь. У моделі розглядається скорочена праця.

Можна перерахувати коефіцієнти повних витрат праці (витрати праці на одиницю кінцевої продукції). Математично ці коефіцієнти визначаємо з твору вектора коефіцієнтів трудомісткості на матрицю коефіцієнтів повних витрат: $\left(\overline{b}^1, \quad \overline{b}^2\right) = \left(b_n^1, \quad b_n^2\right)\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$;

$$\overline{b}^1 = b_n^1 c_1^1 + b_n^2 c_1^2 \quad \overline{b}^2 = b_n^1 c_2^1 + b_n^2 c_2^2 \qquad (9)$$

Тут $\overline{b}^i (i = 1,2)$ - витрати живої праці обох галузей на відтворення одиниці кінцевої продукції і-галузі.

Забезпеченість плану основними виробничими фондами знайдемо аналогічно. Визначаємо норми фондоємності h_0^i зі звітного балансу

$$h_0^i = \frac{K_0^i}{x_0^i} \qquad (i = 1,2) \qquad (10)$$

де: $K_0^i -$ основні виробничі фонди і-й галузі на кінець звітного періоду.

Скоректувавши ці норми на планований період (h_n^1, h_n^2), складемо баланс основних виробничих фондів: $K_n = h_n^1 x_n^1 + h_g^2 x_n^2$ і порівняємо з їхнім прогнозним значенням К*. У випадку Кп>К* розрахунки повторюються для нового варіанта кінцевого продукту $\vec{Y}_n = (y_n^1, y_n^2)$, який дорівнюється зі знайденим $\vec{Y}_n$ щодо трудових ресурсів.

Знаючи коефіцієнти прямих затрат фондів, можна визначити затрати фондів на одиницю кінцевої продукції $\overline{h}^i \quad (i = 1,2)$ як твір рядка фондоємності на матрицю коефіцієнтів повних затрат (Е-А)-1

$$\left(\overline{h}^1, \overline{h}^2\right) = \left(h_n^1, h_n^2\right)\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{h}^1 = h_n^1 c_1^1 + h_n^2 c_1^2$$

$$\overline{h}^2 = h_n^1 c_2^1 + h_n^2 c_n^2 \qquad (11)$$

тобто одержимо затрати виробничих фондів на відтворення одиниці кінцевої продукції в і-й галузі. Для стійкої роботи СП необхідно, щоб ці затрати були не більш потоку валових капітальних вкладень. Для аналізу усталеності розділимо кінцевий продукт (Y1 ,Y2) галузей I і II відповідно на валові капітальні вкладення І1 і І2 і невиробниче споживання W1 і W2

$$Y^1 = I^1 + W^1$$
$$Y^2 = I^2 + W^2 \qquad (12)$$

Будемо вирішувати задачу без амортизаційних відрахувань і вважати, що усі валові капітальні вкладення йдуть на розвиток (або підтримка на заданому рівні) сільськогосподарського підприємства. Тоді витрата валових капітальних вкладень 11, 12 кожної галузі буде

$$I^1 = I_1^1 + I_2^1$$
$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 \qquad (13)$$

У найпростішому випадку приймемо, що потік валових капітальних вкладень Iij (i,j=1,2) із i-й галузі в j-ю пропорційний приросту валової продукції j-й галузі.

$$I_j^i = s_j^i \Delta x^j \qquad (14)$$

З урахуванням цього балансові рівняння приймуть вид

$$X^1 = a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 + s_1^1 \Delta X^1 + s_2^1 \Delta X^2 + W^1(t)$$
$$X^2 = a_1^2 X^1 + a_2^2 X^2 + s_1^2 \Delta X^1 + s_2^2 \Delta X^2 + W^2(t)$$

Зробивши граничний перехід одержимо систему диференціальних рівнянь, що описують динаміку двогалузевого СП.

$$X^1 = a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 + s_1^1 \frac{\partial X^1}{\partial t} + s_2^1 \frac{\partial X^2}{\partial t} W^1(t)$$

$$X^2 = a_1^2 X^1 + a_2^2 X^2 + s_1^2 \frac{\partial X^1}{\partial t} + s_2^2 \frac{\partial X^2}{\partial t} W^2(t) \qquad (15)$$

Розв'язавши систему (15) щодо похідних $\frac{\partial X^1}{\partial t}$ i $\frac{\partial X^2}{\partial t}$ після нескладних перетворень прийдемо до стандартної форми запису математичної моделі динаміки двогалузевого СП у вигляді неоднорідного векторного диференціального рівняння.

$$\frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t} = S^{-1}(E - A)\vec{X}(t) - S^{-1}\vec{W}(t) \qquad (16)$$

де:

$$\frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial X^2(t)}{\partial t} \end{pmatrix}; \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} s_1^1 & s_2^1 \\ s_1^2 & s_2^2 \end{pmatrix}^{-1};$$

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X^1(t) \\ X^2(t) \end{pmatrix}; \qquad \vec{W}(t) = \begin{pmatrix} W^1(t) \\ W^2(t) \end{pmatrix}$$

Матриця S^{-1} характеризує частку кінцевої продукції, вкладеної в розширене відтворення (доля накопичення);

Вектор $\vec{W}(t)$ -вектор невиробничого споживання.

Для замкнутості системи необхідно представити вектор кінцевого продукту як вихід виробничої функції СП, що, у свою чергу, є входом у модель ринку – функцією пропозиції.

Проте і без моделі ринку аналіз моделі СП у вигляді (16) дозволяє визначити усталеність, збалансований ріст або спад виробництва СП у залежності від співвідношення частки накопичення і частки споживання, тобто простежити ефекти типу «проїдання фондів», «вимирання пропозиції праці» і т.п., задаючи початкові умови $\vec{X}(0), \vec{W}(0)$.

Література

Курс економічної теорії. Під ред. проф.Чепурина М.Н., проф. Кисельова Е.А. Кіров: Видавництво «АСА», 1997.

Математична економіка на персональному комп'ютері. під ред. Е.З. Демиденко. М.: «Фінанси і статистика», 1991.

А.И.Плис, Н.А.Сливина. MATHCAD. М: «Фінанси і статистика», 1999.